КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АЛЬ-ФАРАБИ

А.А. Темирбаев

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ

Сборник лекции для студентов и магистрантов
специальности «Радиотехника, электроника и телекоммуникации»

Алматы, 2024

Аннотация

Коллективная динамика в больших ансамблях или сетях связанных осцилляторов или автоколебательных элементов является одной из основных проблем в нелинейной динамике. Она важна как для теоретического понимания сложных процессов, так и для широкого спектра приложений в различных областях. В данном сборнике лекции изложены теоретические основы синхронизации и экспериментальные результаты автора по исследованию синхронизации в электронных ансамблях с глобальной и нелинейной связью.

Сборник лекции предназначен для студентов, желающих ознакомиться с физическим феноменом – синхронизация.

Лекция 8. Переход Курамото.

Цель лекции: Изучить явление перехода Курамото в системах глобально связанных осцилляторов, рассмотреть условия и математические модели, которые описывают процесс перехода от разнородного к синхронизированному состоянию.

1. Переход Курамото

Физический механизм, который был описан выше, известен как переход ***Курамото*** [9, с.102]. Впервые описанный японским ученым Ёсихиро Курамото в 1975 году, этот переход стал классическим примером фазовой синхронизации в ансамбле осцилляторов с различными собственными частотами. Модель Курамото демонстрирует, как изначально неупорядоченные осцилляторы могут постепенно синхронизироваться под действием взаимного влияния, если сила связи между ними превышает определённый критический порог. Сценарий такого перехода может быть и более сложным, например, если распределение индивидуальных частот ω_k имеет несколько максимумов. В этом случае могут образоваться несколько синхронных кластеров; в конечном счете они могут как слиться, так и сосуществовать. Кластеризация может наблюдаться, например, и в случае, когда сила взаимодействия элемента ансамбля с его ближайшими в пространстве соседями больше, чем с удаленными.

Сценарий перехода Курамото не зависит от природы колебаний (биологические, электрические, химические и т.д.) и от природы взаимодействия. Глобальная связь электронных систем может быть реализована с помощью общей нагрузки. В этом случае напряжение, приложенное к индивидуальной системе, зависит от суммы токов через все элементы. Химические осцилляторы могут быть связаны через общую среду, где концентрация реагентов зависит от реакции в каждом осцилляторе и, с другой стороны, воздействует на эти реакции.

В общем виде модель Курамото состоит из ансамбля N связанных осцилляторов с фазами $\varphi_k(t)$, с собственными частотами ω_k распределенными с некоторой плотностью вероятности $g(\omega)$, динамика которых определяется уравнением:

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{kj}\sin\left(\varphi_j - \varphi_k\right), \quad k = 1...N, \tag{1}$$

где ε_{kj} - матрица связи между осцилляторами. Синусная функция связи здесь выбрана потому, что это самая простая 2π -периодическая функция. Распределение частот $g(\omega)$ предполагается симметричной относительно некоторого максимума $\bar{\omega}$, т.е. $g(\bar{\omega}-\omega)=g(\bar{\omega}+\omega)$. Сила связи между каждой парой осцилляторов выбирается пропорциональной N^{-1}, для того, чтобы в термодинамическом пределе $N\to\infty$, сила связи оставалась независимой от размера ансамбля. Таким образом, каждый осциллятор стремится колебаться независимо, но связь между ними стремится синхронизовать их так, чтобы все осцилляторы колебались с одинаковой частотой. Следует отметить, что связь стремится синхронизовать систему в фазе только в том случае, когда $\varepsilon>0$, т.е. если связь положительна. В противном случае, когда $\varepsilon<0$, связь будет синхронизовать систему в противофазе. В дальнейшем мы будем называть эти случаи синхронизацией и десинхронизацией соответственно. Для качественного анализа системы (1) удобно рассматривать модель, где все осцилляторы вместе производят некоторое среднее поле, которое само воздействует на каждый осциллятор через обратную связь. Роль обратной связи здесь играет параметр ε. Случай $\varepsilon>0$ соответствует положительной обратной связи, которая стремится синхронизовать систему, а случай когда $\varepsilon<0$ соответствует отрицательной обратной связи, которая стремится десинхронизовать систему. Используя данное представление, можно ввести очень важное понятие комплексного среднего поля в виде:

$$\begin{gathered}
Z=re^{i\Theta}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{i\varphi_j},\\
r\sin\Theta=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\varphi_j,\\
r\sin(\Theta-\varphi_k)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\varphi_j-\varphi_k),
\end{gathered}\tag{2}$$

где r - амплитуда среднего поля или, другими словами параметр порядка (определяющая характеристика) системы, Θ - фаза среднего поля. Здесь параметр порядка r играет роль показателя когерентности осцилляторов. Если фазы всех осцилляторов в ансамбле одинаковы, что соответствует полной синхронизации, то из (2) видно, что $r=1$. Если же фазы всех осцилляторов равномерно распределены в интервале $[0,2\pi)$, что соответствует полной десинхронизации, то мы имеем $r=0$. В общем случае, для произвольного распределения фаз осцилляторов имеем: $0<r<1$. Теперь учитывая понятие среднего поля, для одинаковой связи ε между осцилляторами уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$\dot{\varphi}_k=\omega_k+\varepsilon r\sin(\Theta-\varphi_k),\quad k=1...N. \tag{3}$$

Это уравнение и есть основная модель Курамото. Из данного уравнения видно, что среднее поле можно трактовать как некоторая периодическая внешняя сила, которая воздействует на каждый осциллятор независимым образом, с амплитудой εr и фазой Θ. Конечно же, не следует забывать, что каждый осциллятор ансамбля вносит свой вклад в это среднее поле. Из (3) становится ясным, что нулевое среднее поле не может действовать на каждый осциллятор. Следовательно, некогерентное состояние всегда является решением системы (1). В этом случае каждый элемент ансамбля осциллирует на своей собственной частоте ω_k В общем случае эти частоты различны, и следовательно, все фазы равномерно распределены на интервале $\left[0,2\pi\right)$, что означает, среднее поле в соответствии с (2) равна нулю. В работе [22] показано, что такое некогерентное состояние является нейтрально устойчивым при $\varepsilon < \varepsilon_c$, и несмотря на это, любые возмущения данного состояния затухают со временем. После превышения некоторого порогового ε_c, в системе появляется когерентность, и параметр порядка становится ненулевым: $0 < r < 1$. Бифуркация при критическом значении параметра порядка называется переходом Курамото в глобально связанных ансамблях осцилляторов (рисунок 1).

Следует поподробнее рассмотреть данное нетривиальное состояние системы с ненулевым средним полем. Если оно периодично ($r = const,\ \Theta = \omega t$), то каждое из уравнений (1.3), является фазовым уравнением осциллятора под воздействием внешней периодической силы. Здесь в роли внешней силы выступает среднее поле. В зависимости от параметров этой силы оно может захватить или не захватить осциллятор.

Возникновение среднего поля можно объяснить как некоторый самосогласованный процесс. Допустим, в нашей системе есть ненулевое среднее поле. В какой-то момент, некоторая группа осцилляторов с частотами, близкими к частоте среднего поля, может быть захвачена ею. Тогда, эта группа будет вносить ненулевой вклад в это среднее поле.

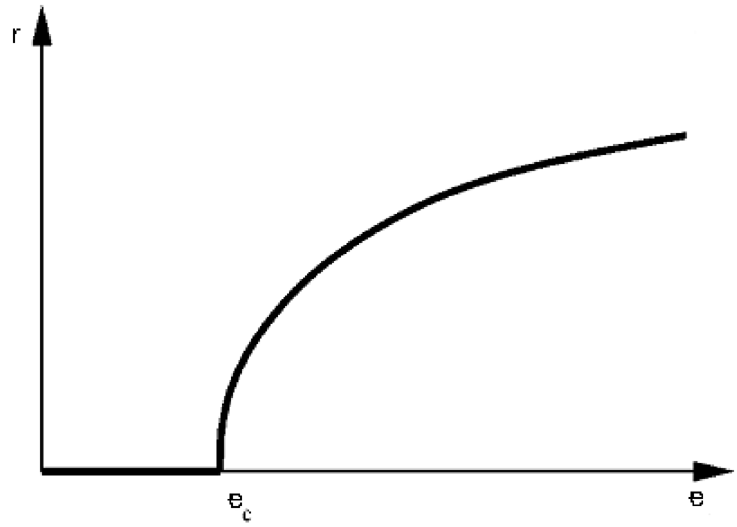

Рис.1 – Качественная картина перехода Курамото. Как мы видим, при значении параметра связи $\varepsilon < \varepsilon_c$, система полностью асинхронна и параметр порядка $r = 0$. При $\varepsilon > \varepsilon_c$, происходит переход Курамото и система уже имеет нетривиальное решение $0 < r < 1$, [13, с.160].

2. Заключение

Переход Курамото в глобально связанных осцилляторах представляет собой универсальный принцип, объясняющий, как синхронизация может возникнуть в системе разнородных осцилляторов под действием глобальных связей. Эта модель имеет широкое применение, от нейробиологии до инженерии и сетевого анализа, и продолжает служить основой для исследований синхронизации в сложных системах.

Список использованных источников

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J., Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.-508p.

2. Rosenblum M., Pikovsky A., Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensemble with global nonlinear coupling //Phys. Rev. Lett.- 2007.-Vol. 98, №6.-P.064101(4).

3. Греченко Т.Н., Психофизиология: учебное пособие. – М.: Гайдарики, 1999. – 358 с.

4. Aschoff J., Daan S., Groos G.A., Vertabrate Circadian Sysytems. Structure and Physihology.- Berlin: Springer,1982.-250p.

5. Moore R.Y., A clock for the ages //Science.- 1999.-Vol. 284.-P.2102-2103.

6. Golomb D., Hansel D., Mato G., Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks in Neuroinformatics and Neural Modeling, ser. Handbook of

Biological Physics, F. Moss and S. Gielen, Eds. Amsterdam: Elsevier, 2001.- Vol. 4, pp. 887–968.

7. Strogatz S. H., From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators //Physica D.- 2000.-Vol.143, no. 1-4, pp. 1–20.

8. Ott E., Chaos in Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2nd edition, 2002.

9. Kuramoto Y., Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.